ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Διάλεξη 05/04/2019 (1)

Lehmann-Scheffe:

↓

2ης Μέθοδος (ΑΟΕΔ)

Βήμα 1ο: Εύρεση επαρκούς και πλήρους Στατ. T.

Βήμα 2ο: Εύρεση μιας συνάρτησης $S=S(T): E(S)=g(\theta)$

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(0,\theta), \theta>0$ $\left(f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}, 0<x<\theta\right)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ.

Λύση

(Βήμα 1ο:)

Έχουμε βρει ότι το επαρκές στατιστικό είναι

$T=X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$

Για την πληρότητα αρκεί νδο:

Αν $\underset{\wedge}{E}[\phi(T)]=0, \forall\theta>0$ τότε $\phi(t)=0, \forall t$

γι'αυτή την λύση τώρα απαιτείται γνώση της κατανομής $T=X_{(n)}$.

Από 1ο θεώρημα η: $f_T(t,\theta)=n[F(t,\theta)]^{n-1}f(t,\theta)$

Για να εφαρμόσω τον παραπάνω τύπο, αρκεί να βρω το $F(t,\theta)$, εφόσον το $f(t,\theta)$ το γνωρίζω.

Αφού έχω $U(0,\theta) \rightarrow F(x,\theta)=\frac{x}{\theta}, 0<x<\theta$.

$$f_T(t,\theta)=n\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=n\cdot\frac{t^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0<t<\theta.$$

Εφόσον $E[\phi(T)]=0, \forall\theta>0 \Longrightarrow \int_0^\theta \phi(t)f_T(t,\theta)\,dt, \forall\theta>0$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \phi(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt=0, \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \phi(t)t^{n-1}\,dt=0, \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta \phi(t)t^{n-1}dt = 0,\ \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \phi(\theta)\cdot\theta^{n-1} = 0,\ \forall\theta>0 \xrightarrow[\theta\neq 0]{\theta>0} \phi(\theta)=0,\ \forall\theta>0$$

Αρα $\phi(t)=0,\ \forall t \Rightarrow T = X_{(n)}$: είναι πλήρες.

(Βήμα 9:)

Δηλαδή επαρκές και πλήρες στατιστικό

Θεωρώ $E(T) \overset{\text{ορ}}{=} \int_0^\theta t f_T(t,\theta)dt = \int_0^\theta t\cdot n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}dt =$

$$= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n dt = \frac{n}{\theta^n}\cdot\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^\theta \Rightarrow E(T) = \frac{n\theta}{n+1}$$

συναρτήση του θ

$$\Rightarrow E\left[\frac{n+1}{n}T\right] = \theta.$$

Αρα $\frac{n+1}{n}T$ συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους T και μάλιστα αμεροληπτη της θ.

Αρα $\frac{n+1}{n}T$: ΑΟΕΔ.

Παρατήρηση: Εστω $S = S(T) = S(X_{(n)})$ που είναι αμερόληπτη της θ. Αρα S αμερ. της θ: $E(S(T)) = \theta \overset{\text{ορ}}{\Rightarrow}$

$$\int_0^\theta S(t)f_T(t,\theta)dt = \theta \Rightarrow \int_0^\theta S(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt = \theta \Rightarrow$$

$$\int_0^\theta S(t)\cdot t^{n-1}dt = \frac{\theta^{n+1}}{n} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\int_0^\theta S(t)t^{n-1}dt\right) = \frac{d}{d\theta}\frac{\theta^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow S(\theta)\theta^{n-1} = \frac{(n+1)\theta^n}{n} \Rightarrow S(\theta) = \frac{(n+1)\theta}{n}.$$

Αρα η $S(T) = \frac{n+1}{n}T$ είναι αμερ. της θ.

Αρα ΑΟΕΔ.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $Εκθ\left(\frac{1}{\theta}\right), \theta>0$

$\left(f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, \ x>0, \theta>0\right)$ Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ;

Λύση

Βήμα 1ο: Επάρκεια: Neyman-Fisher: $f(\underline{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}e^{-x_i/\theta} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta}$$

$\Rightarrow f(\underline{x},\theta)=g[T(\underline{x}),\theta]h(\underline{x})$, $h(\underline{x})=1$,

$g(T(\underline{x}),\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta} \Rightarrow T=\sum_{i=1}^{n} X_i$: επαρκές.

Ελέγχω για πληρότητα. Ωστόσο απαιτείται πρώτα να βρω την κατανομή του επαρκούς. Δηλαδή απαιτείται η κατανομή του $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

Η κατανομή αθροίσματος ανεξαρτήτων βρίσκεται με την μέθοδο ροπογεννήτριας

Από λήμμα 1ο: $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n,\theta)$

Άρα αφού $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n,\theta)$ η $f_T(t,\theta)=\frac{1}{\theta^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t/\theta}$, $t>0, \theta>0$

Για την πληρότητα του $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Έστω $E(\phi(T))=0, \forall\theta>0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \phi(t) f_T(t,\theta)\,dt=0, \ \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \phi(t)\frac{1}{\theta^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t/\theta}\,dt=0, \ \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\infty \phi(t)t^{n-1}e^{-t/\theta}\,dt=0}, \ \forall\theta>0$$

αυτό το ολοκλήρωμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace: $(\phi(t)t^{n-1}) = L(\phi(t)t^{n-1})=0$

$\Rightarrow \phi(t)t^{n-1}=0, \ \forall t>0$

$\Rightarrow \phi(t)=0, \ \forall t>0 \Rightarrow$ Άρα το $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι και πλήρες στατιστικό.

Ζητώ συνάρτηση του $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ που να είναι αμερόληπτη της θ^2.

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση του προηγ. παραδείγματος με μετασχηματισμούς Laplace.

<u>Δοκιμάζουμε:</u> το επαρκές και πλήρες $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

Είναι $E(T)=\cancel{\int_0^\infty t f_T(t,\theta)\,dt} \ \underset{=}{\overset{T\sim G(n,\theta)}{=}} \ n\theta$.

$\Rightarrow E\left(\frac{T}{n}\right)=E(\bar{X})=\theta$, δηλ. $\frac{T}{n}=\bar{X}$: ΑΟΕΔ θ.

Άρα αφού $E(T)$ οδηγεί στην θ ας δοκιμάσουμε το T^2.

$$E(T^2)=Var(T)+(ET)^2 \underset{=}{\overset{T\sim G(n,\theta)}{=}} n\theta^2+(n\theta)^2=n\theta^2+n^2\theta^2$$
$$=n(n+1)\theta^2$$

$\Rightarrow E\left(\frac{T^2}{n(n+1)}\right)=\theta^2$.

Τελικά ο εκτιμητής $\frac{T^2}{n(n+1)}$ είναι συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους T και αμερ. της θ^2.

Άρα $\frac{T^2}{n(n+1)}$: ΑΟΕΔ θ^2.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από Laplace κατανομή με πυκνότητα $f(x,\theta)=e^{-(x-\theta)}$, $x>0,\theta>0$ να βρεθεί το επαρκές και πλήρες στατιστικό.

<u>Λύση</u>

<u>Επάρκεια:</u> Neymann-Fisher:

$$f(\underline{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x_i)=e^{n\theta}e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\infty)}(x_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\infty)}(x_i)=\begin{cases}1, & x_i>\theta,\ \forall i=1,\dots,n\\ 0, & \text{αν } \exists \text{ έστω ένα } i \text{ για το οποίο } x_i<\theta\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x_{(1)}=\min\{x_1,\dots,x_n\}>\theta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

5

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\infty)}(x_i) = I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$$

Συγκεντρωτικά: $f(\underset{\sim}{x},\theta) = e^{n\theta} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$

$$= \underbrace{e^{n\theta} I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})}_{= g[T(\underset{\sim}{x}) = x_{(1)},\theta]} \underbrace{e^{-\sum x_i}}_{= h(\underset{\sim}{x})}$$

$\Rightarrow T = X_{(1)}$: επαρκές.

Πληρότητα: Απαιτείται η κατανομή $T = X_{(1)}$.
Από το 1º Λήμμα: $f_T(t,\theta) = n[1-F(t,\theta)]^{n-1} f(t,\theta),\ t>\theta$.
Πρέπει να βρω την αθροιστική. Έχω ότι:

$$F(t,\theta) \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{-\infty}^{t} f(x,\theta)\,dx = \int_{\theta}^{t} e^{-(x-\theta)}\,dx \Rightarrow$$

$$F(t,\theta) = 1 - e^{-(t-\theta)},\ t>\theta.$$

Άρα $f_T(t,\theta) = n e^{-(n-1)(t-\theta)} e^{-(t-\theta)}$

$$\Rightarrow \boxed{f_T(t,\theta) = n e^{-n(t-\theta)},\ t>\theta.}$$

Έστω $E(\phi(T)) = 0,\ \forall\theta>0 \Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} \phi(t) f_T(t,\theta)\,dt = 0$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} \phi(t) n e^{-nt} e^{n\theta}\,dt = 0,\ \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \int_{\theta}^{\infty} \phi(t) e^{-nt}\,dt,\ \forall\theta>0$$

$$\xrightarrow[\int_{a}^{\beta}\cdots = -\int_{\beta}^{a}\cdots]{\text{ισχύει ότι}} -\int_{\infty}^{\theta} \phi(t) e^{-nt}\,dt = 0,\ \forall\theta>0$$

Έτσι $\frac{d}{d\theta}\int_{\infty}^{\theta} \phi(t) e^{-nt}\, dt = 0 , \forall \theta > 0$

$\Rightarrow \phi(\theta) e^{-n\theta} = 0 , \forall \theta > 0$

$\Rightarrow \phi(\theta) = 0 , \forall \theta > 0$. Άρα $\phi(t) = 0 , \forall t$

Άρα $T = X_{(1)}$: πλήρης.

Παρατήρηση: Μπορώ να βρω ΑΟΕΔ;

Πρέπει να βρω συνάρτηση του $T = X_{(1)}$ η οποία να είναι αμερόληπτη εκτ. θ.

Δοκιμάζω: $E(T) = \int_{\theta}^{\infty} t f_T(t,\theta)\, dt = \int_{\theta}^{\infty} t n e^{-n(t-\theta)}\, dt$

$$= \underbrace{n e^{n\theta} \int_{\theta}^{\infty} t e^{-nt}\, dt}_{\text{Αυτό δεν μπορώ να το βρω.}}$$

διότι είναι : Incomplete Γάμμα συνάρτηση

Συνέπεια και Συνεπής Εκτιμητής:

Κάθε εκτιμητής είναι συνάρτηση του τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ δηλ. $T=T(X_1,\dots,X_n)$ (π.χ. $T=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$) και επομένως ο εκτιμητής είναι συνάρτηση του μεγέθους του τ.δ. n.

Η συνέπεια αναφέρεται στην συμπεριφορά του εκτιμητή $T=T(X_1,\dots,X_n)$ ως συνάρτηση του n και ειδικότερα για μεγάλο n. Δηλαδή $n\to\infty$.

Ορισμός: Έστω ένα τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθ. με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$. Έστω $T_n=T_n(X_1,\dots,X_n)$ ένας εκτιμητής της $g(\theta)$. Ο T_n (ή η ακολουθία των εκτιμητών $T_n(X_1,\dots,X_n)$) λέγεται συνεπής (consistent) εκτιμητής της $g(\theta)$, αν $\lim\limits_{n\to\infty} P(|T_n(X_1,\dots,X_n)-g(\theta)|>\varepsilon)=0$, $\forall\varepsilon>0$

Πρόταση: Ο εκτιμητής $T_n=T_n(X_1,\dots,X_n)$ είναι συνεπής εκτιμητής της $g(\theta)$ αν:

α) $E(T_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} g(\theta)$

β) $Var(T_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Απόδ.

Ανισότητα Markov: Αν W μια τ.μ. τότε

$$P(|W|>\varepsilon)\le\frac{E(W^2)}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα αυτή για $W=T_n-g(\theta)$ θα έχω:

$$P(|T_n-g(\theta)|>\varepsilon)\le\frac{E(|T_n-g(\theta)|^2)}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{E((T_n-g(\theta))^2)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{Var(T_n - g(\theta)) + (E(T_n - g(\theta)))^2}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{Var(T_n) + (E(T_n) - g(\theta))^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από πληθυσμό κανονικό με παραμέτρους: $N(\mu, \sigma^2)$. Νδο $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ είναι συνεπής εκτιμητής της σ^2.

<u>Λύση</u>

Αρκεί νδο: α) $E(S^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$ <u>και</u> β) $Var(S^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Από το 2ο μάθημα η δειγματική διακύμανση S^2 είναι αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 οποιουδήποτε πληθυσμού, άρα και του $N(\mu, \sigma^2)$

Δηλαδή $E(S^2) = \sigma^2$.

Άρα η (α) ικανοποιείται.

Επειδή τα $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ έχουμε ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$. Έτσι $Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = Var(X^2_{n-1}) = 2(n-1)$

$$\Rightarrow Var(S^2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Άρα και το (β) ικανοποιείται

Επομένως S^2 συνεπής της σ^2.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό $U(0, \theta)$, $\theta > 0$. $\left(f(x,\theta) = \frac{1}{\theta},\ 0 < x < \theta,\ \theta > 0 \right)$

ΝΔΟ ο $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ είναι συνεπής εκτιμητής της θ.

Λύση

Αρκεί νδο α) $E(X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ και β) $Var(X_{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Χρησιμοποιώντας την κατανομή του $X_{(n)}$ βρήκαμε ότι

$$f_{X_{(n)}}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta. \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x f_{X_{(n)}}(x,\theta)\,dx = \int_0^\theta x \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}\,dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n} \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^\theta = \frac{n\theta^{n+1}}{(n+1)\theta} = \frac{n}{n+1}\theta.$$

α) $E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\theta \xrightarrow{n\to\infty} \theta$

β) $Var(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - (E(X_{(n)}))^2$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^\theta x^2 f_{X_{(n)}}(x,\theta)\,dx = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}\,dx = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

Άρα $Var(X_{(n)}) = \frac{(2n+3)n^2}{(n+1)^2(n+2)^2}\theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Άρα ικανοποιούνται και η α και η β.

Επομένως ο $X_{(n)}$ είναι και ΑΟΕΔ και συνεπής εκτιμητής της θ.